Аналитическое нахождение неопределённого интеграла.
Стояла задача аналитически найти предел суммы напрямую, а не подбором первообразных.
В результате разных упражнений получилось правило:

1) Берём функцию $f(n)$**.**

2) Аргумент делим на k $f\left(\frac{n}{k}\right)$

3). Всю функцию делим на k $\frac{f\left(\frac{n}{k}\right)}{k}$

4) Вставляем полученную в 3) функцию в выражение для предела суммы с расстановкой n и k:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{n \cdot k} \frac{f\left(\frac{n}{k}\right)}{k}$$

5) Получаем решения для элементарных функциях в Маткаде:

$f(n) = n$ $$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{n \cdot k} \frac{\left(\frac{n}{k}\right)}{k} = \frac{1}{2} \cdot n^2$$

$f(n) = n^2$ $$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{n \cdot k} \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^2}{k} = \frac{1}{3} \cdot n^3$$

$f(n) = \cos(n)$ $$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{n \cdot k} \frac{\cos\left(\frac{n}{k}\right)}{k} = \sin(n)$$

6) Что соответствуют выражениям для непрерывных функций при замене n на x:

$f(x) = x$ $$\int x \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

$f(x) = x^2$ $$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$f(x) = \cos(x)$ $$\int \cos(x) \, dx = \sin(x)$$

$f(x) = \sin(x)$ $$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x)$$

7) Возникают и непонятности (для меня)

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{n \cdot k} \frac{\sin\left(\frac{n}{k}\right)}{k} = -\cos(n) + 1$$ **и другие.**

8) С помощью приведённой формулы можно счислять и определённый интеграл, когда для n берутся значения например от 0 до 10. На это счёт есть и другие способы (метод трапеций и парабол), но вот получение неопределённого интеграла не видел, наверное потому, что не математик.

Филиппов Владимир Юрьевич, инженер, ruslabor@yandex.ru 2004 - 2024